

首届全国大学生数学竞赛赛区赛试卷

(数学类, 2009)

一、求经过三平行直线

$$L_1: x = y = z, \quad L_2: x-1 = y = z+1, \quad L_3: x = y+1 = z-1$$

的圆柱面的方程.

二、设 $C^{n \times n}$ 是 $n \times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 C 上的线性空间,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

(1) 假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 若 $AF = FA$, 证明:

$$A = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E.$$

(2) 求 $C^{n \times n}$ 的子空间 $C(F) = \{X \in C^{n \times n} \mid FX = XF\}$ 的维数.

三、假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间 ($n > 0$), f, g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg - gf = f$, 证明:
 f 的特征值都是 0, 且 f, g 有公共特征向量.

四、设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并在 $[a, b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \leq M$. (1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛; (2) 记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a, b]$ 上处处可导, 为什么?

五、设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left| \frac{\sin nt}{\sin t} \right|^3 dt$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

六、 $f(x, y)$ 是 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上二次连续可微函数, 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^2$, 计算积分

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

七、假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0, f(0))$ ，与点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$ ，其中 $0 < c < 1$. 证明：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ ，使 $f''(\xi) = 0$.

