

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷

(非数学类 2009)

一、填空题

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$ _____, 其中区域 D 由直线

$x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足

$$f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2,$$

则 $f(x) =$ _____.

(3) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是

_____.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导

数, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

二、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

三、设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$

并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx = \oint_L xe^{-\sin y} dy - ye^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L xe^{\sin y} dy - ye^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

五、已知

$$y_1 = xe^x + e^{2x}, \quad y_2 = xe^x + e^{-x}, \quad y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

六、设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $y \geq 0$ ，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c ，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

七、已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n=1, 2, \dots),$$

且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$ ，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

八、求 $x \rightarrow 1^-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.