

## 第二届全国大学生数学竞赛预赛试题

(非数学类, 2010)

考试形式 闭卷

考试时间 150 分钟

满分 100 分

一、(本题共 5 小题, 各小题 5 分, 共 25 分) 计算下列各题(要求写出重要步骤)。

(1) 设  $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$ , 其中  $|a| < 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ .

(3) 设  $s > 0$ , 求  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$  ( $n=1, 2, \cdots$ ).

(4) 设函数  $f(t)$  有二阶连续导数,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ , 求  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ .

(5) 求直线  $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$  与直线  $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$  的距离.

二、(本题 15 分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶导数, 并且

$$f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0,$$

且存在一点  $x_0$ , 使得  $f(x_0) < 0$ . 证明  $f(x) = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  恰有两实根.

三、(本题 15 分) 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$  ( $t > -1$ ) 所确定, 且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \text{ 其中 } \psi(t) \text{ 具有二阶导数, 曲线 } y = \psi(t) \text{ 与 } y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e} \text{ 在 } t=1 \text{ 处}$$

相切, 求函数  $\psi(t)$ .

四、(本题 15 分) 设  $a_n > 0$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 证明:

(1) 当  $\alpha > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  收敛;

(2) 当  $\alpha \leq 1$ , 且  $S_n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  发散.

五、( 本题 15 分 ) 设  $l$  是过原点、方向为  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ( 其中  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  ) 的直线 ,

均匀椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( 其中  $0 < c < b < a$  , 密度为 1 ) 绕  $l$  旋转 .

( 1 ) 求其转动惯量 ;

( 2 ) 求其转动惯量关于方向  $(\alpha, \beta, \gamma)$  的最大值和最小值 .

六、( 本题 15 分 ) 设函数  $\varphi(x)$  具有连续的导数 , 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线  $C$

上 , 曲线积分  $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$  的值为常数 .

( 1 ) 设  $L$  为正向闭曲线  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  , 证明  $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$  ;

( 2 ) 求函数  $\varphi(x)$  ;

( 3 ) 设  $C$  是围绕原点的光滑简单正向闭曲线 , 求  $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$  .