

第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷 (数学类)

(2010)

一 (本题10分) 设 $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 = a, x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ ($n=0,1,2,\dots$), 证明 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根。

二 (本题15分) , 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵。

三 (本题共10分) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x,y)$ 是凸函数。证明或否定: $f(x,y)$ 在 D 上连续。

(注: 函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0,1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 则 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2)$.)

四(本题共10分) 设 $f(x)$ 在【0,1】上Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0$

$f'(1)=a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a$.

五 已知二次曲面 Σ (非退化) 过以下九点: A(1,0,0), B(1,1,2),
C(1,-1,-2), D(3,0,0), E(3,1,2), F(3,-2,-4), G(0,1,4), H(3,-1,-2), I(5,2 $\sqrt{2}$,8).
问 Σ 是哪一类曲面?

六(本题共20分), 设 A 为 $n \times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 n 维实向量
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha A \alpha^T \geq 0$ (这里 α^T 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β 使
得 $\beta A \beta^T = 0$, 同时对任意 n 维实向量 x 和 y , 当 $x A y^T \neq 0$ 时有 $x A y^T + y A x^T \neq 0$. 证明
: 对任意的 n 维实向量 v , 都有 $v A \beta^T = 0$.

七(本题共10分) 设 f 在区间 $[0,1]$ 上Riemann可积, $0 \leq f \leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在只取值为0和1的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$, $|\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx| < \varepsilon$.

八(本题10分) 已知 $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty$, 且 $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt = a < +\infty$, 其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证: $\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}$.