

第二届全国大学生数学竞赛决赛试题及解答

(北京: 2011-3-19)

武汉大学数学与统计学院 樊启斌 2011 年 4 月 23 日

一、(15 分) 求出过原点且和椭球面 $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

【解】 所述圆周过原点, 则一定以原点为圆心, 且在球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad ①$$

上. 因此, 该球面与椭球面

$$4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1 \quad ②$$

的交线即为圆周. 由①、②确定的平面也必包含此圆周. 联立此二式, 得

$$\left(4 - \frac{1}{R^2}\right)x^2 + \left(5 - \frac{1}{R^2}\right)y^2 + \left(6 - \frac{1}{R^2}\right)z^2 = 0$$

显然, 当 $R^2 = \frac{1}{5}$ 时, 有 $x^2 - z^2 = 0$, 这是两相交平面 $x = z$, $x + z = 0$, 即为所求.

二、(15 分) 设 $0 < f(x) < 1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ 都收敛. 求证:

$$\int_0^{+\infty} xf(x)dx > \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} f(x)dx \right)^2.$$

【证】 令 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = a$, 则 $a \in (0, +\infty)$. 据题设条件 $0 < f(x) < 1$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xf(x)dx &= \int_0^a xf(x)dx + \int_a^{+\infty} xf(x)dx > \int_0^a xf(x)dx + a \int_a^{+\infty} f(x)dx \\ &= \int_0^a xf(x)dx + a \left(a - \int_0^a f(x)dx \right) \\ &= \int_0^a xf(x)dx + a \int_0^a (1 - f(x))dx \\ &> \int_0^a xf(x)dx + \int_0^a x(1 - f(x))dx \\ &= \int_0^a xdx = \frac{1}{2}a^2, \end{aligned}$$

因此, 得 $\int_0^{+\infty} xf(x)dx > \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} f(x)dx \right)^2$.

三、(15 分) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, $t_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} + \cdots + ka_{n+k} + \cdots$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.

【证】 首先, 注意到

$$t_n = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{n+k} (n+k) a_{n+k},$$

据题设条件 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, 可知 $\sum_{k=1}^{+\infty} (n+k) a_{n+k}$ 收敛, 而 $\left\{ \frac{k}{n+k} \right\}$ 关于 k 单调, 且 $0 < \frac{k}{n+k} < 1$

即有界, 故由 Abel 判别法知 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{n+k} (n+k) a_{n+k}$ 收敛, 即 t_n 有意义.

因为 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} ka_k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

此时, 对任何 $n > N$ 以及 $m > 1$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m ka_{n+k} &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{n+k} (R_{k+n} - R_{k+n+1}) = \sum_{k=1}^m \frac{k}{n+k} R_{k+n} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{k-1}{n+k-1} R_{k+n} \\ &= \frac{1}{n+1} R_{n+1} - \frac{m}{n+m} R_{m+n+1} + \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{n+k} - \frac{k-1}{n+k-1} \right) R_{k+n}, \end{aligned}$$

于是, 有

$$\left| \sum_{k=1}^m ka_{n+k} \right| \leq \left(\frac{1}{n+1} + \frac{m}{n+m} \right) \varepsilon + \sum_{k=2}^m \left(\frac{k}{n+k} - \frac{k-1}{n+k-1} \right) \varepsilon = \frac{2m}{n+m} \varepsilon < 2\varepsilon.$$

所以, $|t_n| \leq 2\varepsilon$, ($n > N$), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.

四、(15 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换 $\sigma_A: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, $\sigma_A(X) = AX - XA$. 证

明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 \mathbb{C} 上 n 阶方阵组成的线性空间.

【证】 取 $M_n(\mathbb{C})$ 的自然基 $\{E_{ij}: i, j = 1, 2, \dots, n\}$, 其中 E_{ij} 是 (i, j) 元等于 1, 其它元均为 0

的 n 阶矩阵. 因为 A 可对角化, 所以存在可逆矩阵 $P \in M_n(\mathbb{C})$, 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

显然, $\{PE_{ij}P^{-1}: i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 也是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一组基, 并且有

$$\sigma_A(PE_{ij}P^{-1}) = A(PE_{ij}P^{-1}) - (PE_{ij}P^{-1})A = P(\Lambda E_{ij} - E_{ij}\Lambda)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)PE_{ij}P^{-1},$$

所以 σ_A 在基 $PE_{11}P^{-1}, \dots, PE_{1n}P^{-1}, \dots, PE_{n1}P^{-1}, \dots, PE_{nn}P^{-1}$ 下的矩阵为对角矩阵

$$\text{diag}(0, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_n - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_{n-1}, 0),$$

这就是说, σ_A 可对角化.

五、(20 分) 设连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $\sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < +\infty$. 证明: 存在

实常数 a 满足 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - ax| < +\infty$.

【证】 令 $M = \sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)|$, 则 $\forall x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}^+$, 有

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M, \quad (1)$$

$$|f(nx) - f((n-1)x) - f(x)| \leq M.$$

于是, 有

$$|f(nx) - nf(x)| \leq \sum_{k=2}^n |f(kx) - f((k-1)x) - f(x)| \leq (n-1)M \leq nM. \quad (2)$$

因此

$$|nf(mx) - mf(nx)| \leq |nf(mx) - f(mnx)| + |f(mnx) - mf(nx)| \leq (n+m)M,$$

$$\left| \frac{f(mx)}{m} - \frac{f(nx)}{n} \right| \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) M.$$

这表明函数列 $\left\{ \frac{f(nx)}{n} \right\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 设其极限为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 是连续函数.

进一步, 由不等式①, 有

$$\left| \frac{f(n(x+y))}{n} - \frac{f(nx)}{n} - \frac{f(ny)}{n} \right| \leq \frac{M}{n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^+.$$

取极限, 得 $g(x+y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. 由此可解得

$$g(x) = g(1)x = ax.$$

另一方面, 再由②式, 得

$$\left| \frac{f(nx)}{n} - f(x) \right| \leq M.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得 $|g(x) - f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 从而 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - f(x)| \leq M < +\infty$. 故存在实常

数 a , 使得 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - ax| \leq M < +\infty$.

六、(20 分) 设 $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足 $\varphi(XY) = \varphi(YX)$, $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$,

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 \mathbb{R} 上 n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型 $(-, -)$:

$M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $(X, Y) = \varphi(XY)$.

(1) 证明 $(-, -)$ 是非退化的, 即若 $(X, Y) = 0$, $\forall Y \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = O$;

(2) 设 A_1, A_2, \dots, A_{n^2} 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, B_1, B_2, \dots, B_{n^2} 是相应的对偶基, 即

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j, \\ 1, & \text{当 } i = j. \end{cases}$$

证明 $\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$ 是数量矩阵.

【证】(1) 先确定 φ 的结构. 取 $M_n(\mathbb{R})$ 的自然基 $\{E_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, n\}$, 其中 E_{ij} 是 (i, j) 元等于 1, 其它元均为 0 的 n 阶矩阵. 令 $c_{ji} = \varphi(E_{ij})$, 则 $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, 有

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ji} = \text{tr}(AC).$$

根据题设, $\varphi(XY) = \varphi(YX)$, $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, 所以 $\text{tr}(YCX) = \text{tr}(XYC) = \text{tr}(YXC)$. 因此

$XC = CX$. 由于 X 的任意性, 知 $C = \lambda E$ 为数量矩阵. 于是有 $\varphi(A) = \lambda \text{tr}(A)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

因为 $\varphi \neq 0$, 所以 $\lambda \neq 0$.

现在, 如果 $(X, Y) = \lambda \text{tr}(XY) = 0$, $\forall Y \in M_n(\mathbb{R})$, 取 $Y = X^T$, 那么 $X = O$.

(2) 令 $A_i = (a_{pq}^i)$, $B_i = (b_{st}^i)$. 设 $E_{pq} = \sum_{i=1}^{n^2} \varepsilon_i^{pq} B_i$, 利用 $\{A_i\}$ 与 $\{B_j\}$ 的对偶性, 有

$$(A_j, E_{pq}) = \sum_{i=1}^{n^2} \varepsilon_i^{pq} (A_j, B_i) = \varepsilon_j^{pq}.$$

另一方面, 由(1)的结果, 有 $(A_j, E_{pq}) = \lambda \text{tr}(A_j E_{pq}) = \lambda a_{qp}^j$, 所以 $E_{pq} = \lambda \sum_{i=1}^{n^2} a_{qp}^i B_i$. 比较等式

两边的 (s, t) 元, 得 $\sum_{i=1}^{n^2} a_{qp}^i b_{st}^i = \frac{1}{\lambda} \delta_{ps} \delta_{qt}$. 注意到, $E_{pq} E_{st} = \delta_{qs} E_{pt}$, 因此, 有

$$\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n^2} \left(\sum_{p,q=1}^n a_{pq}^i E_{pq} \right) \left(\sum_{s,t=1}^n b_{st}^i E_{st} \right) = \sum_{p,q=1}^n \sum_{s,t=1}^n \sum_{i=1}^{n^2} a_{pq}^i b_{st}^i \delta_{qs} E_{pt} = \frac{1}{\lambda} \sum_{s,t=1}^n \sum_{p,q=1}^n \delta_{pt} \delta_{qs} E_{pt} = \frac{n}{\lambda} E.$$